БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00427, № 12-01-31140).

Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G. ON THE APPLICATION OF COVERING MAPPING THEORY TO NONLINEAR MARKET MODELS

Existence of an equilibrium price-vector in a nonlinear market model is studied. Sufficient conditions for existence of the equilibrium price-vector are obtained. Stability of the equilibrium is studied. These results are obtained as corollaries of theorems from covering mappings theory.

Key words: α-covering mappings; coincidence points; demand function; supply function; equilibrium price-vector.

УДК 517.922, 517.988.5

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© **Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова**

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; обыкновенные дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной; управляемые дифференциальные системы.

Получено утверждение о липшицевых возмущениях векторного накрывающего отображения. Этот результат используется для исследования разрешимости управляемой дифференциальной системы неявного вида со смешанными ограничениями на управление и фазовые переменные.

Идея использования накрывающих отображений для исследования дифференциальных управляемых систем была предложена в работах [1, 2]. Для эффективного применения предложенных схем возникла необходимость распространения теорем о липшицевых возмущениях на векторные накрывающие отображения. В работе [3] получены утверждения о возмущениях для отображений, действующих в произведении двух метрических пространств. В данной работе такое утверждение получено для отображений, действующих в произведении любого конечного количества метрических пространств. Этот результат мы используем для исследования управляемых систем, описываемых не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями со смешанными ограничениями на управление и фазовые переменные.

Приведем определения понятий, необходимых для формулировки основных результатов.

Пусть заданы метрические пространства (X,ρ_X), (Y,ρ_Y). Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r>0$ в пространстве X (аналогичное обозначение используем для Y и конкретных метрических пространств, рассматриваемых ниже).

О п р е д е л е н и е 1 [4, определение 1]. Пусть задано число $\alpha>0$. Отображение $\Psi: X\to Y$ называется *α-накрывающим*, если для любого $r>0$ и любого $u\in X$ имеет место включение

$$\Psi\big(B_X(u,r)\big)\supseteq B_Y\big(\Psi(u),\alpha r\big).$$

Отметим, что отображение Ψ является α-накрывающим тогда и только тогда, когда для любых $u\in X$, $y\in Y$ существует $x\in X$, удовлетворяющий уравнению $\Psi(x)=y$ и оценке

$$\rho_X(x,u) \leqslant \alpha^{-1}\rho_Y\big(y,\Psi(u)\big). \tag{1}$$

Это свойство называют *метрической регулярностью* [5]. Понятие накрывания связано с двумя свойствами отображений: сюръективностью и преобразованием расстояний в соответствии с неравенством (1). Эти свойства бывает целесообразно разъединить, поскольку в ряде задач оказывается достаточно одного из них. В связи с этим в [6, с. 615] предложено понятие условного накрывания.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Psi: X\to Y$ называется *условно* α*-накрывающим*, если для любого $r>0$ и любого $u\in X$ имеет место включение

$$\Psi\big(B_X(u,r)\big) \supseteq B_Y\big(\Psi(u),\alpha r\big)\cap\Psi(X).$$

Отображение Ψ является условно α-накрывающим, тогда и только тогда, когда для любых $u\in X$, $y\in\Psi(X)$ существует $x\in X$, удовлетворяющий уравнению $\Psi(x)=y$ и оценке (1).

Пусть заданы метрические пространства (X_j,ρ_{X_j}), (Y_j,ρ_{Y_j}), точки $y_j\in Y_j$, $j=\overline{1,n}$, и определены отображения $\Phi_i: X_i\times\prod_{j=1}^n X_j\to Y_i$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,x_1,x_2,\dots,x_n)=y_1,\\ \Phi_2(x_2,x_1,x_2,\dots,x_n)=y_2,\\ \qquad\vdots\\ \Phi_n(x_n,x_1,x_2,\dots,x_n)=y_n, \end{cases} \tag{2}$$

относительно неизвестного $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\prod_{j=1}^n X_j$.

Положим $X=\prod_{j=1}^n X_j$, $Y=\prod_{j=1}^n Y_j$. На множестве X будем определять метрику равенством

$$\rho_X(x,u)=\big|\rho_{X_1}(x_1,u_1),\rho_{X_2}(x_2,u_2),\dots,\rho_{X_n}(x_n,u_n)\big|, \quad \forall\, x=(x_j)_{j=\overline{1,n}},\ u=(u_j)_{j=\overline{1,n}}\in X, \tag{3}$$

где $|\cdot|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^n$. Определим отображение

$$\Upsilon: X\times X\to Y,\quad \Upsilon(u,x)=\big(\Phi_i(u_i,x)\big)_{i=\overline{1,n}}.$$

Тогда систему (2) можно записать в виде уравнения

$$\Upsilon(x,x)=y.$$

Пусть заданы числа $\alpha_i>0$, $\beta_{ij}\geqslant 0$, $i,j=\overline{1,n}$. Определим матрицы

$$A=\operatorname{diag}(\alpha_i)_{n\times n},\quad B=(\beta_{ij})_{n\times n},\quad C=A^{-1}B=(\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}.$$

Обозначим $\varrho(C)$ — спектральный радиус матрицы C.

Т е о р е м а 1. *Пусть метрические пространства* X_j, $j=\overline{1,n}$, *являются полными и выполнены следующие условия:*

для всех $i=\overline{1,n}$, $x\in X$ *отображение* $\Phi_i(\cdot,x): X_i\to Y_i$ *является условно* α_i*-накрывающим и*

$$y_i\in\Phi_i(X_i,x);$$

при любых $i,j=\overline{1,n}$ *для всех* $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1, \ldots,$ $x_{j-1} \in X_{j-1}$, $x_{j+1} \in X_{j+1}, \ldots,$ $x_n \in X_n$ *отображение* $\Phi_i(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ *является* β_{ij}*-липшицевым;*

для любой последовательности $\{u^k\} \subset X$ *из того, что* $u^k \to u$, $\Upsilon(u^k, u) \to y$, *следует* $\Upsilon(u,u)=y$.

Тогда, если $\varrho(C)<1$, *то система уравнений* (2) *разрешима, и, кроме того, для любого* $\varepsilon>0$ *можно так определить норму* $|\cdot|$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$, *что при задании метрики в* X *формулой* (3) *для произвольного* $u^0=(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ *существует решение* $x=\xi \in X$ *системы* (2), *удовлетворяющее оценке*

$$\rho_X(\xi, u^0) \leqslant \Big(\frac{1}{1-\varrho(C)} + \varepsilon\Big) \Big| \Big(\frac{\rho_{Y_1}(y_1, \Phi_1(u_1^0, u^0))}{\alpha_1}, \frac{\rho_{Y_2}(y_2, \Phi_2(u_2^0, u^0))}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\rho_{Y_n}(y_n, \Phi_n(u_n^0, u^0))}{\alpha_n} \Big) \Big|. \qquad (4)$$

Для применения теоремы 1 к исследованию управляемых дифференциальных систем требуются условия накрывания оператора суперпозиции (оператора Немыцкого) в функциональных пространствах. В работах [6, 7] получен признак накрывания оператора Немыцкого в пространствах существенно ограниченных функций, в [8] — в пространстве суммируемых функций. Здесь приведено более общее утверждение об условиях накрывания оператора Немыцкого в пространствах суммируемых с любой степенью функций.

Путь $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^l)$ — пространства всех непустых замкнутых и, соответственно, компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^l$. Для множества $W \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$ обозначаем $dW = \min_{w \in W} |w|$; для $V \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^l)$ обозначаем $|V| = \max_{v \in V} |a|$.

Стандартно обозначаем: $L_p\big([a,b], \mathbb{R}^l\big)$ — пространство функций $y:[a,b] \to \mathbb{R}^l$, суммируемых в p-ой степени, $1 \leqslant p < \infty$; $L_\infty\big([a,b], \mathbb{R}^l\big)$ — пространство существенно ограниченных функций $y:[a,b] \to \mathbb{R}^l$.

Пусть задано $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и определено измеримое многозначное отображение $\Omega:[a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$, такое что $d\Omega(\cdot) \in L_p\big([a,b], \mathbb{R}^l\big)$. Определим полные метрические пространства: $L_p\big([a,b], \Omega\big)$ — пространство функций $t \in [a,b] \mapsto y(t) \in \Omega(t)$, суммируемых в p-ой степени, если $1 \leqslant p < \infty$, и существенно ограниченных при $p=\infty$, с метрикой

$$\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \Big(\int_a^b \big| y_1(s) - y_2(s) \big|^p ds \Big)^{1/p}, \ p \neq \infty; \quad \rho_{L_\infty}(y_1, y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} \big| y_1(s) - y_2(s) \big| ;$$

$AC_p\big([a,b], \Omega\big)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b] \to \mathbb{R}^l$, что $\dot{x} \in L_p([a,b], \Omega)$, с метрикой $\rho_{AC_p}(x_1, x_2) = \big| \big(\rho_{L_p}(\dot{x}_1, \dot{x}_2),\, x_1(a) - x_2(a) \big) \big|$. В перечисленных обозначениях функциональных пространств будем опускать область определения и множество значений функций — элементов пространств, если это не приводит к разночтениям.

Пусть заданы числа $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$. Пусть при каждом $t \in [a,b]$ заданы измеримые многозначные отображения

$$t \in [a,b] \mapsto \Omega(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_1}), \quad t \in [a,b] \mapsto \Theta(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

для которых $d\Omega(\cdot) \in L_{p_1}\big([a,b], \mathbb{R}^{l_1}\big)$, $d\Theta(\cdot) \in L_{p_2}\big([a,b], \mathbb{R}^{l_2}\big)$, и определена функция

$$\big(t \in [a,b],\, x \in \Omega(t)\big) \mapsto g\big(t,x\big) \in \Theta(t),$$

удовлетворяющая условиям Каратеодори. Используя известные условия [9, с. 375] действия оператора Немыцкого в пространствах $L_p\big([a,b],\mathbb{R}^l\big)$, легко показать, что отображение

$$(N_g y)(t) = g\big(t, y(t)\big), \tag{5}$$

действует из $L_{p_1}\big([a,b],\Omega\big)$, $p_1 \neq \infty$ в $L_{p_2}\big([a,b],\Theta\big)$ тогда и только тогда, когда

$$\exists\,\eta \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R}^{l_2})\ \ \exists\,\lambda \in \mathbb{R}\ \ \dot\forall\, t \in [a,b]\ \ \forall\, y \in \Omega(t)\ \ \big|g(t,y)\big| \leqslant \lambda |y|^{p_1/p_2} + \eta(t), \tag{6}$$

и в этом случае оператор $N_g : L_{p_1}\big([a,b],\Omega\big) \to L_{p_2}\big([a,b],\Theta\big)$ является непрерывным и ограниченным. Для того чтобы оператор (5) действовал из $L_\infty\big([a,b],\Omega\big)$ в $L_{p_2}\big([a,b],\Theta\big)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\forall\, r > 0\ \ \exists\,\eta_r \in L_{p_2}([a,b],\mathbb{R}^{l_2})\ \ \dot\forall\, t \in [a,b]\ \ \forall\, y \in \Omega(t)\ \ |y| \leqslant r\ \ \big|g(t,y)\big| \leqslant \eta_r(t), \tag{7}$$

в этом случае оператор $N_g : L_\infty\big([a,b],\Omega\big) \to L_{p_2}\big([a,b],\Theta\big)$ является замкнутым и ограниченным.

Т е о р е м а 2. *Пусть заданы числа* $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, *и для функции* g, *если* $p_1 \neq \infty$, *выполнено условие* (6), *а при* $p_1 = \infty$ *— условие* (7). *Тогда, если для некоторого* $\alpha_g > 0$ *при п. в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \Theta(t)$ *является условно* α_g *-накрывающим, то оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1} \to L_{p_2}$ *будет условно* α_N *-накрывающим, где*

$$\alpha_N = \frac{\alpha_g}{(b-a)^{(p_2-p_1)/p_1p_2}};$$

в частности, при $p_1 = p_2$ *константы накрывания равны:* $\alpha_N = \alpha_g$, *в случае* $p_1 < p_2 = \infty$ *выполнено* $\alpha_N = (b-a)^{-1/p_1}\alpha_g$. *Аналогично, если при п. в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \Omega(t) \to \Theta(t)$ *является* α_g *-накрывающим, то оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1} \to L_{p_2}$ *будет* α_N *-накрывающим.*

Применим теоремы 1, 2 к исследованию управляемости дифференциальных систем.

Пусть заданы $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $A_0 \in \mathbb{R}^n$, измеримые многозначные отображения

$$\Omega : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n),\quad U : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^k),\quad V : [a,b] \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

и существует такое $R_V \in \mathbb{R}$, что $\big|V(t)\big| \leqslant R_V$ при п. в. $t \in [a,b]$. Пусть, далее, определены удовлетворяющие условиям Каратеодори функции

$$f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_1},\quad g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l_2},$$

относительно которых, кроме того, предполагаем, что для любого $r > 0$ существует такое $R > 0$, что при п. в. t для всех x, z, u, удовлетворяющих условию $|x| + |z| + |u| \leqslant r$, имеют место неравенства $\big|f(t,x,z,u)\big| \leqslant R$, $\big|g(t,x,u)\big| \leqslant R$.

Рассмотрим управляемую систему

$$f\big(t, x(t), \dot x(t), u(t)\big) = 0,\quad t \in [a,b],\quad x(a) = A_0, \tag{8}$$

с ограничениями на управление и фазовые переменные

$$u(t) \in U(t),\quad g\big(t, x(t), u(t)\big) \in V(t),\quad t \in [a,b] \tag{9}$$

и дополнительным ограничением на производную решения

$$\dot x(t) \in \Omega(t),\quad t \in [a,b]. \tag{10}$$

Управление $u(\cdot)$ будем предполагать измеримым и существенно ограниченным, а решение $x(\cdot)$ будем искать в классе абсолютно непрерывных функций, имеющих существенно ограниченную производную. Соответственно, локальным решением управляемой системы будем считать пару $(x,u)\in AC_\infty\big([a,a+\tau],\Omega\big)\times L_\infty\big([a,a+\tau],U\big)$, удовлетворяющую уравнениям (8), (9), (10), при почти всех $t\in[a,a+\tau]$, $\tau\in(0,b-a]$.

Пусть задано $\sigma>0$. Положим $D=B_{\mathbb{R}^n}(A_0,\sigma)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть существуют такие положительные числа* α_1, α_2 *и неотрицательные* β_1, β_2, *что выполнены следующие условия:*

при п. в. $t\in[a,b]$ *и любых* $x\in D$, $u\in U(t)$ *отображение* $f(t,x,\cdot,u):\Omega(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$ *является условно* α_1 *-накрывающим;*

существует такое $r_0>0$, *что при п. в.* $t\in[a,b]$ *и любых* $x\in D$, $u\in U(t)$ *имеет место включение* $0\in f\big(t,x,B_{\mathbb{R}^n}(0,r_0)\bigcap\Omega(t),u\big)$;

при п. в. $t\in[a,b]$ *и любых* $z\in\Omega(t)$ *отображение* $f(t,\cdot,z,\cdot):D\times U(t)\to\mathbb{R}^{l_1}$ *является* β_1 *-липшицевым;*

при п. в. $t\in[a,b]$ *и любых* $x\in D$ *отображение* $g(t,x,\cdot):U(t)\to\mathbb{R}^{l_2}$ *является условно* α_2 *-накрывающим;*

при п. в. $t\in[a,b]$ *и любых* $u\in U(t)$ *отображение* $g(t,\cdot,u):D\to\mathbb{R}^{l_2}$ *является* β_2 *-липшицевым;*

множество $\Big(\bigcap\limits_{x\in D} g\big(t,x,U(t)\big)\Big)\bigcap V(t)$ *не пусто при п. в.* $t\in[a,b]$.

Тогда управляемая система (8), (9), (10) *локально разрешима.*

В заключение приведем оценку решения управляемой системы (8), (9), (10), следующую из неравенства (4).

Определим матрицу
$$C=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\tau\beta_1 & \alpha_1^{-1}\beta_1\\ \alpha_2^{-1}\tau\beta_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Зададим норму $|\cdot|'$ в $\mathbb{R}^2$, так, чтобы
$$|C|'=\varrho(C)=\frac{\tau\beta_1}{2\alpha_1}+\sqrt{\frac{\tau^2\beta_1^2}{4\alpha_1^2}-\frac{\tau\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}} \tag{11}$$
(это возможно, т. к. у 2×2 матрицы C два различных собственных числа). Выберем любое $\tau>0$, удовлетворяющее следующим двум соотношениям:
$$\tau\leqslant\frac{r_0}{\sigma},\quad \tau<\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\alpha_2+\beta_1\beta_2},$$
и произвольные функции $u_0\in L_\infty\big([a,a+\tau],U\big)$, $v_0\in L_\infty\big([a,a+\tau],\Omega\big)$. Пусть $\tau\big|v_0(t)\big|\leqslant\sigma$. Положим
$$\phi_1=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\Big|f\Big(t,\ A_0+\int_a^t v_0(s)\,ds,\ v_0(t),u_0(t)\Big)\Big|,$$
$$\phi_2=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\Big|g\Big(t,\ A_0+\int_a^t v_0(s)\,ds,u_0(t)\Big)-\eta(t)\Big|.$$

Тогда существует решение $(x,u)\in AC_\infty\big([a,a+\tau],\Omega\big)\times L_\infty\big([a,a+\tau],U\big)$ управляемой системы (8), (9), (10), удовлетворяющее неравенству
$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\tau]}\big|\big(\dot x(t)-v_0(t),\ u(t)-u_0(t)\big)\big|'\leqslant\frac{1}{1-\varrho(C)}\,\big|\big(\frac{\phi_1}{\alpha_1},\frac{\phi_2}{\alpha_2}\big)\big|'.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561-1570.
2. *Плужникова Е.А.* Один метод исследования разрешимости задач управления для дифференциальных уравнений // Тезисы научной конференции "Тихоновские чтения". М., 2011. С. 65-66.
3. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Теорема о накрывании операторов в произведении метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 1 С. 70-72.
4. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
5. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 2004. V. 50. P. 2650-2683.
6. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
7. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026-1044.
8. *Плужникова Е.А.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686-1687.
9. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М., 1968. 448 с.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00-645, № 11-01-00-626), Министерства образования и науки РФ (ГК № 14.132.21.1348, проект № 1.1877.2011).

Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. ON QUESTION OF SOLVABILITY OF CONTROLLED DIFFERENTIAL SYSTEMS

A statement on Lipschitz perturbations of a vector covering mapping is derived. This result is used for to study the solvability of a controlled differential system in implicit form with mixed constrains on control and phase variables.

Key words: covering mappings in metric spaces; ordinary differential equations unsolved for derivative; controlled differential systems.